COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. L | 1985 | FASC. 1

SUR CERTAINS ÉLÉMENTS ERGODIQUES DANS $l^\infty(G)$

PAR

WOJCIECH CHOJNACKI (WARSZAWA)

1. Soient G un semi-groupe, $l^\infty(G)$ l'espace des fonctions complexes bornées dans G, muni de la norme de la convergence uniforme. Une *moyenne invariante à droite* sur $l^\infty(G)$ est une forme linéaire continue m sur $l^\infty(G)$, vérifiant

$$\|m\|_\infty = 1 = m(1),\text{(}^1\text{)}$$

ainsi que, pour tout $a \in G$ et tout $f \in l^\infty(G)$,

$$m(R_a f) = m(f),$$

la fonction $R_a f$, appelée *translatée à droite de f par a*, étant définie en chaque point $b \in G$ comme $f(ba)$. Un semi-groupe discret G admettant une moyenne invariante à droite sur $l^\infty(G)$ est dit *moyennable à droite*. Les définitions de moyenne invariante (à gauche) et de semi-groupe discret moyennable (à gauche) sont analogues. On sait que tout semi-groupe abélien discret est moyennable (cf. [1]).

Dans cette note nous obtiendrons essentiellement deux résultats. L'un sera une version abstraite du théorème suivant: *pour toute moyenne invariante m sur $l^\infty(\mathbf{R}_d^n)$ et tout polynôme réel p à n variables, on a*

$$m(e^{ip}) = \begin{cases} 0, & si \quad \deg p \geq 1, \\ e^{ip(0,\ldots,0)}, & si \quad \deg p = 0. \end{cases}$$

L'autre sous sa forme la plus élémentaire sera le théorème affirmant que, par rapport à une norme quelconque appartenant à une certaine classe de normes invariantes par translation, l'écart entre la fonction e^{ip} et l'espace linéaire engendré par les fonctions de la forme e^{iq}, où p et q sont des polynômes réels à n variables, $p-q \neq \text{const}$, est égal à 1.

(1) On note de la même façon la norme d'un espace et la norme de l'espace dual.

2. Soient G un semi-groupe discret moyennable à droite, m une moyenne invariante à droite sur $l^\infty(G)$. Par l'abus de langage désignons l'espace $l^\infty(G)/\{f \in l^\infty(G)\colon\ m(|f|^2) = 0\}$, par $l^\infty(G)$. On munit $l^\infty(G)$ de la structure d'espace préhilbertien dans lequel le produit scalaire donné par $m(f\bar{g})$, $f, g \in l^\infty(G)$. On dira qu'un sous-ensemble de $l^\infty(G)$ est *m-orthogonal* (*m-orthonormal*) s'il est orthogonal (orthonormal) par rapport au produit scalaire introduit ci-dessus à l'aide de m. Un ensemble m-orthonormal pour toute moyenne invariante à droite m sur $l^\infty(G)$ sera appelé orthonormal à droite. On dira qu'un ensemble E, composé de fonctions définies dans G à valeurs dans $\boldsymbol{T} = \{z \in \boldsymbol{C}\colon\ |z| = 1\}$, a *la propriété* (m) lorsqu'il existe une suite $(E_i)_{i=0}^\infty$ de sous-ensembles de E satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = E$,

(ii) E_0 est m-orthonormal,

(iii) pour tout $i \in \boldsymbol{N}$, si $f \in E_i$, alors $\bar{f} \in E_i$,

(iv) pour tout $i \in \boldsymbol{N}$, si $f, g \in E_i$, alors $fg \in E_i$,

(v) pour tout $i \in \boldsymbol{N}$, si $f \in E_i \setminus \{1\}$, alors il existe une suite $(f_k)_{k=1}^\infty$ d'éléments distincts de E_{i-1}, une suite $(a_k)_{k=1}^\infty$ d'éléments de G, et une suite $(z_k)_{k=1}^\infty$ de nombres complexes de $\boldsymbol{T}$, tels que l'on ait

$$R_{a_k} f = z_k f f_k$$

pour tout $k \in \boldsymbol{N}$.

THÉORÈME 1. *Soient G un semi-groupe discret moyennable à droite, E un sous-ensemble de $\boldsymbol{T}^G$ ayant la propriété (m) pour une moyenne invariante à droite m sur $l^\infty(G)$. Alors E est m-orthonormal.*

Démonstration. On établira le théorème en démontrant par récurrence que chacun des sous-ensembles E_i est m-orthonormal. Supposons E_{i-1} m-orthonormal (pour $i = 1$ cette hypothèse coïncide avec (ii)). Puisque tout élément de E_i est une fonction à valeurs dans $\boldsymbol{T}$, pour prouver que l'ensemble E_i est m-orthonormal, il suffit de montrer qu'il est m-orthogonal. Soient f, g deux éléments distincts de E_i, $h = f\bar{g}$. Evidemment $h \in E_i \setminus \{1\}$. Donc il existe une suite $(h_k)_{k=1}^\infty$ d'éléments distincts de E_{i-1}, une suite $(a_k)_{k=1}^\infty$ d'éléments de G, et une suite $(z_k)_{k=1}^\infty$ de nombres complexes de $\boldsymbol{T}$, tels que l'on ait $R_{a_k} h = z_k h h_k$ pour tout $k \in \boldsymbol{N}$. Par hypothèse, $\{\bar{h}_k\}_{k=1}^\infty$ est m-orthonormal. En outre

$$m(h) = m(R_{a_k} h) = z_k\, m(hh_k)$$

pour tout $k \in \boldsymbol{N}$. On en déduit que les coefficients de Fourier de h relatifs à $\{\bar{h}_k\}_{k=1}^\infty$ ont la même valeur absolue, donc, grâce à l'inégalité de Bessel, ils s'annullent. Par conséquent, $m(h) = 0$. Cela achève la démonstration. □

Si G est un semi-groupe discret moyennable (à droite, à gauche), on appelle *ergodique* (*à droite, à gauche*) tout élément de $l^\infty(G)$ sur lequel les moyennes invariantes (à droite, à gauche) coïncident.

Comme un simple corollaire du théorème établi on a le

THÉORÈME 2. *Soient G un semi-groupe discret moyennable à droite, E un sous-ensemble de T^G ayant la propriété (m) pour toute moyenne invariante à droite m sur $l^\infty(G)$ et tel que $1 \in E$. Alors chaque élément f de E est ergodique à droite; plus précisément, quelle que soit la moyenne invariante à droite m sur $l^\infty(G)$, on a*

$$m(f) = \begin{cases} 0, & si \ \ f \neq 1, \\ 1, & si \ \ f = 1. \end{cases}$$

Soient P un anneau commutatif, G le groupe additif de P envisagé comme un groupe discret, I un ensemble, $P[X_i]_{i\in I}$ l'anneau des polynômes par rapport à des indéterminées X_i $(i \in I)$, J l'idéal de $P[X_i]_{i\in I}$ engendré par $\{X_i \colon i \in I\}$. Dans la suite on désignera par p aussi bien un polynôme de $P[X_i]_{i\in I}$ que la fonction définie dans le produit direct P^I à valeurs dans P, associée à ce polynôme. Un caractère χ de G sera dit *I-fidèle* si pour tout $p \in J$ tel que $\deg p \geqslant 2$, l'ensemble $\{\chi \circ (R_a p - p - p(a))\colon a \in G^I\}$ est infini lorsque $\chi \circ p \neq 1$.

Exemple. Si P est le corps des réels $\mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$, alors $x \to e^{iax}$ est un caractère de G $(= \mathbf{R}_d)$ I-fidèle pour tout ensemble I.

THÉORÈME 3. *Soient P un anneau commutatif, G le groupe additif de P, I un ensemble, χ un caractère I-fidèle de G, p un polynôme de $P[X_i]_{i\in I}$. Alors $\chi \circ p$ est un élément ergodique de $l^\infty(G^I)$; plus précisément, pour toute moyenne invariante m sur $l^\infty(G^I)$, on a*

$$m(\chi \circ p) = \begin{cases} 0, & si \ \ \chi \circ p \neq \text{const}, \\ \chi \circ p(0), & si \ \ \chi \circ p = \text{const}. \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration est immédiate quitte à appliquer le théorème 2 à $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$, $E_i = \{\chi \circ p\colon p \in J,\ \deg p \leqslant i+1\}$. $\square$

3. Soient G un semi-groupe discret moyennable à droite, E un sous-ensemble orthonormal à droite de T^G, A une sous-algèbre de $l^\infty(G)$ engendrée par E, unitaire, autoadjointe, invariante par translation à droite (c'est-à-dire telle que $f \in A$ entraîne $R_a f \in A$ pour tout $a \in G$), les opérations d'addition, de multiplication, de multiplication par un scalaire, et de conjugaison étant les opérations habituelles. Supposons A munie d'une seminorme $\| \ \|$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $\|1\| = 1$,

(ii) $\|f\| \leqslant \|f\|_\infty$ pour tout $f \in A$,

(iii) $\|f\bar{e}\| = \|f\|$ pour tout $f \in A$ et tout $e \in E$,

(iv) $\|R_a f\| \leqslant \|f\|$ pour tout $f \in A$ et tout $a \in G$.

Notons $\hat{e}$ l'enveloppe linéaire de $E \setminus \{e\}$.

THÉORÈME 4. *$\|\ \|$ est une norme sur l'enveloppe linéaire de E. En outre, pour tout $e \in E$, on a*

$$\operatorname{dist}(e, \hat{e}) = 1,$$

la distance se rapportant à la norme $\|\ \|$.

Démonstration. Etant donnée une forme linéaire l sur A, on notera $\|l\|$ la norme de la forme induite par l sur l'espace quotient $A/\ker\|\ \|$.

Construisons tout d'abord une moyenne invariante à droite m sur $l^{\infty}(G)$, telle que sa restriction à A, $m_{|A}$, vérifie $\|m_{|A}\| = 1$.

Soit l une forme linéaire sur A, telle que $\|l\| = 1$ et $l(1) = 1$. Evidemment $\|l\|_{\infty} = 1$. Prolongeons l en une forme linéaire sur $l^{\infty}(G)$, notée encore l, telle que $\|l\|_{\infty} = 1$. Etant donnée $f \in l^{\infty}(G)$, définissons la fonction g_f par $g_f(a) = l(R_a f)$ pour tout $a \in G$. Soit n une moyenne invariante à droite sur $l^{\infty}(G)$. Posons $m(f) = n(g_f)$ pour tout $f \in l^{\infty}(G)$. Il est clair que m est une forme linéaire sur $l^{\infty}(G)$, telle que $m(1) = \|m_{|A}\| = \|m\|_{\infty} = 1$. Compte tenu de l'identité $g_{R_a f} = R_a g_f$ valable pour tout $a \in G$ et tout $f \in l^{\infty}(G)$, on conclut facilement que m est une moyenne invariante à droite sur $l^{\infty}(G)$.

Cela étant, notons que pour tout $e \in E$, la forme linéaire l_e sur A, ayant pour expression $l_e(f) = m(f\bar{e})$ pour tout $f \in A$, s'annulle sur $\hat{e}$ et atteint 1 sur e. En outre $\|l_e\| = 1$. Si maintenant $f = \sum_{e \in E} z_e e$ ($z_e \in C$) est tel que $\|f\| = 0$, alors pour tout $e \in E$, $z_e = l_e(f) = 0$, donc $f = 0$, et la première partie du théorème est établie.

En second lieu, quel que soit $e \in E$, on a d'une part $\|e - f\| \geqslant |l_e(e-f)| = 1$ pour tout $f \in \hat{e}$, et d'autre part $\|e\| = 1$. Cela prouve la seconde assertion de l'énoncé. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. M. Day, *Ergodic theorems for abelian semigroups*, Transactions of the American Mathematical Society 51 (1942), p. 399–412.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE VARSOVIE
WARSZAWA, POLOGNE

Reçu par la Rédaction le 7.04.1981
en version modifiée le 15.08.1982