COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. L 1986 FASC. 2

SUR UN THÉORÈME DE DAY, UN THÉORÈME DE MAZUR–ORLICZ ET UNE GÉNÉRALISATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE SILVERMAN

PAR

WOJCIECH CHOJNACKI (WARSZAWA)

Dédié à ma soeur Malgorzata

1. Soient G un semi-groupe, $l^{\infty}(G)$ l'espace des fonctions réelles bornées dans G. On appelle *moyenne invariante à droite sur* $l^{\infty}(G)$ une forme linéaire positive m sur $l^{\infty}(G)$, vérifiant

$$m(1) = 1,$$

ainsi que, pour tout $a \in G$ et tout $f \in l^{\infty}(G)$,

$$m(R_a f) = m(f),$$

la fonction $R_a f$, appelée *translatée à droite de* f *par* a, étant définie en chaque point $b \in G$ comme $f(ba)$. Un semi-groupe discret G admettant une moyenne invariante à droite sur $l^{\infty}(G)$ est dit *moyennable à droite*. Les définitions de moyenne invariante (à gauche) et de semi-groupe discret moyennable (à gauche) sont analogues.

Un théorème fondamental de Day est que tout semi-groupe abélien discret est moyennable. Une des méthodes pour établir le théorème de Day consiste à appliquer convenablement des théorèmes du type topologique comme le théorème d'Alaoglu ou le théorème de Markov–Kakutani (cf. [1]). Il est possible aussi de déduire le théorème de Day du théorème de Hahn–Banach (cf. [3]) ou bien d'une généralisation de ce résultat, le théorème de Mazur–Orlicz (cf. [5]). Ci-dessous on prouve que le théorème de Mazur–Orlicz peut s'obtenir à partir du théorème de Day. Vu la première méthode pour établir le théorème de Day, le théorème de Mazur–Orlicz et, à plus forte raison, le théorème de Hahn–Banach pourront donc s'interpréter comme des propositions topologiques. En dehors de la version usuelle, une version généralisée du théorème de Mazur–Orlicz sera démontrée dans cet article en tant que résultat topologique. La méthode utilisée dans la démonstration de cette version du théorème de Mazur–Orlicz permettra d'établir aussi un théorème de prolongement invariant d'opérateurs linéaires. Ce dernier resultat, généralisant quelques théorèmes de Silverman [6], fournira une réponse complète à une question formulée dans [1].

2. THÉORÈME 1 (Mazur–Orlicz). *Soient E un espace vectoriel réel, p une application de E dans $\mathbf{R}$, sous-additive et positivement homogène, T un ensemble, u une application de T dans E, a une application de T dans $\mathbf{R}$. Pour qu'il existe une forme linéaire f sur E, vérifiant*

(i) *$f(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$,*

(ii) *$a(t) \leqslant f(u(t))$ pour tout $t \in T$,*

il faut et il suffit que l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a(t_i) \leqslant p\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(t_i)\Big)$$

soit remplie pour toute partie finie $\{t_1, \ldots, t_n\}$ de T et tout ensemble fini $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de nombres réels positifs.

Démonstration. La nécessité de cette condition étant évidente, nous allons en prouver la suffisance.

Soit $x \in E$; posons

$$P(x) = \inf\Big\{p\Big(x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(t_i)\Big) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a(t_i)\Big\},$$

la borne inférieure étant étendue à toutes les parties finies $\{t_1, \ldots, t_n\}$ de T et à tous les ensembles finis $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de nombres réels positifs; $P(x)$ est un nombre bien défini, car, quels que soient $t_1, \ldots, t_n \in T$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a(t_i) \leqslant p\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(t_i)\Big) \leqslant p\Big(x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(t_i)\Big) + p(-x)$$

donc

$$-p(-x) \leqslant p\Big(x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(t_i)\Big) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a(t_i).$$

On vérifie aisément que $-p(-x) \leqslant P(x+y) - P(y) \leqslant p(x)$ pour tout couple x, $y \in E$, ainsi que $a(t) \leqslant P(u(t)+y) - P(y)$ pour tout $t \in T$ et tout $y \in E$.

Soit m une moyenne invariante sur $l^{\infty}(E)$, E étant considéré comme un groupe abélien discret avec l'addition pour loi de composition. Posons $f(x) = m(R_x P - P)$ pour tout $x \in E$. La fonction f jouit évidemment des propriétés (i) et (ii). On va montrer qu'elle est linéaire, ce qui terminera la démonstration.

Quels que soient x, $y \in E$, on a

$$f(y) = m(R_y P - P) = m\big(R_x(R_y P - P)\big)$$
$$= m(R_{x+y} P - P) - m(R_x P - P) = f(x+y) - f(x).$$

En outre, pour tout $x \in E$, on a

$$f(-x) = m(R_{-x} P - P) = m\big(R_x(R_{-x} P - P)\big) = -m(R_x P - P) = -f(x).$$

En particulier, il résulte de là que $f(wx) = wf(x)$ pour tout $w \in \boldsymbol{Q}$ et tout $x \in E$. Si $\lambda \in \boldsymbol{R}$ et $x \in E$, on a alors

$$\begin{aligned} \lambda f(x) - f(\lambda x) &= \inf\{wf(x) - f(\lambda x) \colon w > \lambda,\ w \in \boldsymbol{Q}\} \\ &= \inf\{f\big((w-\lambda)x\big) \colon w > \lambda,\ w \in \boldsymbol{Q}\} \\ &\leqslant \inf\{p\big((w-\lambda)x\big) \colon w > \lambda,\ w \in \boldsymbol{Q}\} \\ &= \inf\{(w-\lambda)\,p(x) \colon w > \lambda,\ w \in \boldsymbol{Q}\} = 0. \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec celle qui s'en obtient en substituant $-x$ à x, on parvient à l'identité $\lambda f(x) = f(\lambda x)$.

Cela achève la démonstration.

3. Dans ce qui suit, nous étendons l'argument utilisé ci-dessus à une preuve d'une version généralisée du théorème de Mazur–Orlicz.

Nous rappelons d'abord quelques définitions et notations.

Soient A un ensemble, F un espace vectoriel ordonné.

Si H est une partie de F, on note $l_b(A, H)$ l'ensemble des fonctions de A dans H, bornées pour l'ordre de F.

Par abus de langage, on identifie tout élément x de F à la fonction constante de $l_b(A, F)$ à valeur x.

On désigne par F^+ le cône des éléments positifs de F.

On munit $l_b(A, F)$ de l'ordre usuel en prenant $l_b(A, F^+)$ pour cône des éléments positifs.

On dit que F est *complet pour l'ordre* si toute partie majorée (minorée) de F admet une borne supérieure (inférieure).

Si F est réticulé et complet pour l'ordre, on dit qu'il est *complètement réticulé.*

THÉORÈME 2. *Soient G un semi-groupe discret moyennable à droite, F un espace vectoriel ordonné, complet pour l'ordre. Alors il existe un opérateur linéaire positif M de $l_b(G, F)$ dans F, vérifiant, pour tout $x \in F$,*

$$M(x) = x,$$

ainsi que, pour tout $a \in G$ et tout $f \in l_b(G, F)$,

$$M(R_a f) = M(f).$$

Dans la suite, chaque opérateur linéaire de $l_b(G, F)$ dans F jouissant des propriétés de l'énoncé du théorème 2 sera appelé *moyenne invariante à droite sur* $l_b(G, F)$.

Démonstration. Soient F un espace vectoriel ordonné, complet pour l'ordre, F_0 le sous-espace vectoriel de F engendré par F^+.

On vérifie d'abord que F_0 est complètement réticulé.

Si H est une partie de F_0 majorée par $x \in F_0$, on a $x - \sup_F H \in F^+$. Donc $\sup_F H \in F_0$, de sorte que $\sup_F H = \sup_{F_0} H$. De façon analogue, si I est une partie de F_0 minorée par un élément de F_0, on a $\inf_F I = \inf_{F_0} I$. Ainsi, F_0 est complet pour l'ordre.

De plus, quels que soient $x, y \in F_0$ s'écrivant $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ avec x_1, x_2, y_1, y_2 dans F^+, on a

$$-y_1 - y_2 \leqslant x \leqslant x_1 + x_2, \qquad -y_1 - y_2 \leqslant y \leqslant x_1 + x_2.$$

Puisque F_0 est complet pour l'ordre, il s'ensuit que $\{x, y\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans F_0. F_0 est alors réticulé.

Cela étant, soient G un semi-groupe discret moyennable à droite, M une moyenne invariante à droite sur $l_b(G, F_0)$. Etant donné $f \in l_b(G, F)$, si $x \in F$ est tel que $f - x \in l_b(G, F_0)$, on pose

$$M(f) = x + M(f - x).$$

Ce que la valeur de $M(f)$ ne dépend que de f tient à ce que si $f - y \in l_b(G, F_0)$ pour un $y \in F$ autre que x, on a $x - y = f - y - (f - x) \in F_0$, donc $x - y = M(f - y) - M(f - x)$, et finalement $x + M(f - x) = y + M(f - y)$. On vérifie aussitôt que l'opérateur linéaire $l_b(G, F) \ni f \mapsto M(f) \in F$ est une moyenne invariante à droite sur $l_b(G, F)$.

Sans perdre la généralité, on peut alors supposer que F est complètement réticulé. En vertu du théorème de Maeda–Ogasawara (cf. [4], th. 15.5), F peut s'identifier à un idéal d'ordre d'un espace vectoriel complètement réticulé du type $C^\infty(S)$ (= l'espace des fonctions continues f: $S \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ telles que $\operatorname{Int} f^{-1}(\{-\infty\}) = \operatorname{Int} f^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset$), S étant un espace compact extrêmement discontinu. D'après un résultat de Gleason [2], il existe un espace discret D tel que βD (= le compactifié de Stone-Čech de D) contienne S et que S soit un rétracte de βD. Soit m une moyenne invariante à droite sur $l^\infty(G)$. Puisque chaque fonction réelle bornée dans D se prolonge de façon unique en une fonction réelle continue dans βD, quel que soit $f \in l_b(G, C(\beta D))$ ($C(X)$ = l'espace des fonctions réelles continues dans un espace topologique X), il existe une et une seule fonction $M_0(f) \in C(\beta D)$ telle que, pour tout $d \in D$, on ait

$$M_0(f)(d) = m(\delta_d \circ f),$$

δ_d étant la forme d'évaluation au point d, associant à toute fonction de $C(\beta D)$ sa valeur en d. Il est clair que l'opérateur linéaire

$l_b(G, C(\beta D)) \ni f \mapsto M_0(f) \in C(\beta D)$ est une moyenne invariante à droite sur $l_b(G, C(\beta D))$.

Soient r une rétraction de βD sur S, I l'injection de $l_b(G, C(S))$ dans $l_b(G, C(\beta D))$, ayant pour expression

$$If(a) = f(a) \circ r$$

quels que soient $a \in G$ et $f \in l_b(G, C(S))$, R l'opérateur de restriction à S des fonctions de $C(\beta D)$. Or, le composé $M = RM_0 I$ est évidemment une moyenne invariante à droite sur $l_b(G, C(S))$.

Cela étant, on pose, pour tout $f \in l_b(C, C^\infty(S)^+)$,

$$M(f) = \sup\{M(\inf\{n, f\}) \colon n \in N\},$$

la borne supérieure étant prise dans $C^\infty(S)^+$. L'application

$$l_b(G, C^\infty(S)^+) \ni f \mapsto M(f) \in C^\infty(S)^+$$

est positivement homogène et additive, la dernière propriété résultant aussitôt des inégalités

$$\inf\{n, f+g\} \leqslant \inf\{n, f\} + \inf\{n, g\} \leqslant \inf\{2n, f+g\}$$

valables pour tout couple $f, g \in l_b(G, C^\infty(S)^+)$ et tout $n \in N$. Puisque $l_b(G, C^\infty(S)^+)$ engendre linéairement $l_b(G, C^\infty(S))$, M se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire de $l_b(G, C^\infty(S))$ dans $C^\infty(S)$, noté de même M. Il est évident que M ainsi obtenu est une moyenne invariante à droite sur $l_b(G, C^\infty(S))$.

Passant au cas général, observons qu'étant donné $f \in l_b(G, F)$, en particulier un élément de $l_b(G, C^\infty(S))$, si $x \in F^+$ est tel que $|f| \leqslant x$, on a $|M(f)| \leqslant x$, d'où $M(f) \in F$, vu que F est un idéal d'ordre de $C^\infty(S)$. Par conséquent, M restreint à $l_b(G, F)$ est une moyenne invariante à droite sur $l_b(G, F)$.

La démonstration est ainsi achevée.

Maintenant, grâce au théorème établi, it est facile de modifier le raisonnement de la section précédente de façon à obtenir une preuve du

THÉORÈME 3 (Mazur–Orlicz). *Soient E un espace vectoriel réel, F un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre, p une application de E dans F, sous-additive et postitivement homogène, T un ensemble, u une application de T dans E, a une application de T dans F. Pour qu'il existe un opérateur linéaire S de E dans F, vérifiant*

(i) $S(x) \leqslant p(x)$ *pour tout* $x \in E$,

(ii) $a(t) \leqslant S(u(t))$ *pour tout* $t \in T$,

il faut et il suffit que l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a(t_i) \leqslant p\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(t_i)\Big)$$

soit remplie pour toute partie finie $\{t_1, \ldots, t_n\}$ *de T et tout ensemble fini* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *de nombres réels positifs.*

4. THÉORÈME 4. *Soient E un espace vectoriel réel, G un semi-groupe discret moyennable à droite, $G \times E \ni (a, x) \to ax \in E$ une représentation linéaire gauche de G dans E, F un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre, p une application de E dans F, sous-additive et positivement homogène, telle que, pour tout $a \in G$ et tout $x \in E$, on ait $p(ax) \leqslant p(x)$. Soient E_0 un sous-espace vectoriel de E stable pour l'action de G, S_0 un opérateur linéaire de E_0 dans F, vérifiant $S_0(ax) = S_0(x)$ pour tout $a \in G$ et tout $x \in E_0$, ainsi que $S_0(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E_0$. Alors S_0 se prolonge en un opérateur linéaire S de E dans F vérifiant $S(ax) = S(x)$ pour tout $a \in G$ et tout $x \in E$, ainsi que $S(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Soit T un opérateur linéaire de E dans F, prolongeant S_0 et vérifiant $T(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$; l'existence d'un tel opérateur ressort de la version généralisée du théorème de Hahn–Banach qui s'obtient de façon évidente du théorème 3. Etant donné $x \in E$, définissons une fonction $f_x \in l_b(G, F)$ en posant $f_x(a) = T(ax)$ pour tout $a \in G$. Soit M une moyenne invariante à droite sur $l_b(G, F)$. Posons

$$S(x) = M(f_x)$$

pour tout $x \in E$. Il est clair que $E \ni x \mapsto S(x) \in F$ est un opérateur linéaire dont la restriction à E_0 est S_0 et qui vérifie $S(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$. Compte tenu de l'indentité $f_{ax} = R_a f_x$ valable pour tout $a \in G$ et tout $x \in E$, on conclut que l'on a $S(ax) = S(x)$ pour tout $a \in G$ et tout $x \in E$.

Cela achève la démonstration.

BIBLIOGRAFIE

[1] M. M. Day, *Semigroups and amenability*, p. 5–53 dans: *Semigroups, Proceedings of a Symposium on Semigroups Held at Wayne State University, Detroit, Michigan, June 27–29, 1968*, edited by K. W. Folley, Academic Press, New York and London 1969.

[2] A. M. Gleason, *Projective topological spaces*, Illinois Journal of Mathematics 2 (1958), p. 482–489.

[3] F. P. Greenleaf, *Invariant Means on Topological Groups and Their Applications*, Van Nostrand Reinhold Company, New York–Toronto–London–Melbourne 1969.

[4] E. De Jonge et A. C. M. Van Rooij, *Introduction to Riesz Spaces*, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1977.

[5] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires II*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 137–179.

[6] R. J. Silverman, *Means on semigroups and the Hahn–Banach extension property*, Transactions of the American Mathematical Society 83 (1956), p. 222–237.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE VARSOVIE
WARSZAWA, POLOGNE

Reçu par la Rédaction le 1. 07. 1981;
en version modifiée le 14. 02. 1983

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXIII 1992 FASC. 1

ERRATUM À L'ARTICLE "SUR UN THÉORÈME DE DAY, UN THÉORÈME DE MAZUR–ORLICZ ET UNE GÉNÉRALISATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE SILVERMAN"

(COLLOQUIUM MATHEMATICUM 50 (1986), 257–262)

PAR

WOJCIECH CHOJNACKI (WARSZAWA)

Le raisonnement sur la page 259 entre les phrases "Si $\lambda \in \boldsymbol{R}$ et $x \in E\ldots$" et "...on parvient à l'identité $\lambda f(x) = f(\lambda x)$" nécessite une correction, la raison étant le fait que $f(x)$ et $p(x)$ ne doivent pas être positifs. Voilà une telle correction.

Pour achever la démonstration du Théorème 1, il suffit de montrer que $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ pour tout $x \in E$ et tout nombre positif λ.

Étant donné $x \in E$, posons

$$\begin{aligned} q(x) &= p(x) + p(-x)\,, \\ r_1(x) &= f(x) + p(-x)\,, \\ r_2(x) &= p(x) - f(x)\,. \end{aligned}$$

Il est clair que la fonction q est positivement homogène et qu'on a $0 \le r_i(x) \le q(x)$ pour $x \in E$ et $i = 1, 2$. En outre, quels que soient $x \in E$, $\lambda > 0$ et $i = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned} \lambda r_i(x) - r_i(\lambda x) &= \inf\{w r_i(x) - r_i(\lambda x) : w > \lambda,\ w \in \boldsymbol{Q}\} \\ &= \inf\{r_i((w-\lambda)x) : w > \lambda,\ w \in \boldsymbol{Q}\} \\ &\le \inf\{q((w-\lambda)x) : w > \lambda,\ w \in \boldsymbol{Q}\} \\ &= \inf\{(w-\lambda)q(x) : w > \lambda,\ w \in \boldsymbol{Q}\} = 0\,. \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec les identités $\lambda r_1(x) - r_1(\lambda x) = \lambda f(x) - f(\lambda x)$ et $\lambda r_2(x) - r_2(\lambda x) = f(\lambda x) - \lambda f(x)$ on parvient à l'identité désirée.